

Bilans énergétiques en mécanique

Exercices du cours

a) Forces conservatives et énergie potentielle

Etablir les expressions des énergies potentielles de pesanteur, gravitationnelle, électrostatique, élastique.

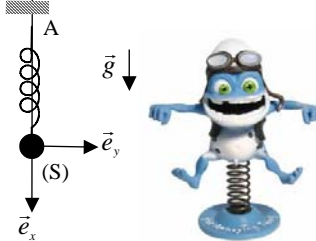
b) Relation entre équation énergétique et équation différentielle

Retrouver l'équation différentielle du pendule simple soumis à une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse par deux méthodes.

c) Force exercée par un ressort : pendule élastique vertical

Un solide (S) de masse m peut glisser sans frottement sur une tige verticale. Ce solide, considéré comme ponctuel, est accroché à un ressort à spires non jointives, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité, A, est fixée à un bâti.

Le solide est écarté d'une quantité a par rapport à sa position d'équilibre et lâché sans vitesse initiale.



1) 1^{ère} méthode

- Etude dynamique :
Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le repère (A, x) et la résoudre.
- Etude énergétique : écrire l'équation énergétique et retrouver l'équation différentielle précédente.

2) 2^{de} méthode : utilisation de la force de rappel

Dans le repère (E, X) d'origine E = position d'équilibre, montrer que tout se passe comme si le système était soumis à **une seule force**, appelée force de rappel, dont on donnera l'expression et l'énergie potentielle associée en fonction de la variable $X = x - x_e$: **écart par rapport à la position d'équilibre**.

Sujet : Faisceaux de particules

Outils : énergies, bilans

Difficulté : *

n° 1.

On envoie un proton de masse m_p et de charge e sur un noyau de masse m_N et de charge Ze (où Z est le numéro atomique et e la charge élémentaire). Le noyau est supposé immobile. Le proton est créé à grande distance du noyau avec la vitesse \vec{v}_0 dirigée vers le noyau. A quelle distance du noyau le proton parviendra-t-il ?

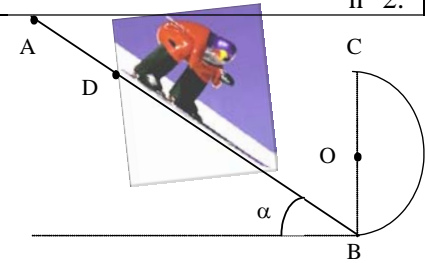
Sujet : Tremplin gouttière

Outils : Théorème de l'énergie cinétique

Difficulté : *

n° 2.

Un jouet d'enfant de type tremplin est constitué d'une piste d'élan rectiligne AB de longueur $\ell = 5,0$ m inclinée d'un angle $\alpha = 15^\circ$ par rapport à l'horizontale suivie d'une partie circulaire de rayon $r = 0,50$ m. L'ensemble de la piste est situé dans un plan vertical.



1. Un bolide (supposé ponctuel) de masse $m = 200$ g est lâché sans vitesse du point A. Il est soumis le long du trajet à une force de frottement constante \vec{F} . Il passe en B à la vitesse $v_B = 3,0$ m.s⁻¹. L'intensité de la pesanteur est $g = 9,8$ m.s⁻². Exprimer et calculer l'intensité de la force de frottement.
2. Le mobile se déplace maintenant sans frottement. On le lâche sans vitesse d'un point D situé entre A et B tel que $DB = x$. On suppose que le changement de pente en B ne provoque pas de variation de la vitesse.
 - a- Exprimer la vitesse v_C du mobile en C en fonction de r, α, x et g .
 - b- Exprimer en fonction de r, α, x, g et m l'intensité de la réaction exercée par la piste sur le mobile en C.
 - c- Quelle valeur minimale faut-il donner à x pour que le mobile quitte la partie circulaire de la piste en C ? La vitesse du mobile est-elle nulle en C ?
 - d- Le mobile peut-il arriver en C avec une vitesse nulle ?

Sujet : Point sur une sphère

Outils : Théorème de l'énergie cinétique et 2^{ème} loi de Newton

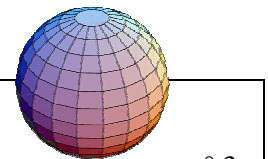
Difficulté : *

n° 3.

Une particule de masse m est lancée du point S_0 (de cote z_0 , Oz vertical ascendant) sur une sphère de centre O, de rayon r , avec une vitesse \vec{v}_0 (tangente à la sphère et contenue dans le plan vertical passant par O) ; elle glisse sans frottement sur la sphère puis décolle et quitte la sphère en un point S_1 .

On désignera par g l'accélération de la pesanteur.

Exprimer la réaction R du support sur la particule en fonction de sa cote z à chaque instant et des données m, r, g, v_0 , et z_0 .



- ✎ Ecrire la 2^{ème} loi de Newton (coord. polaires dans le plan de la trajectoire) et le th. de l'Ec.

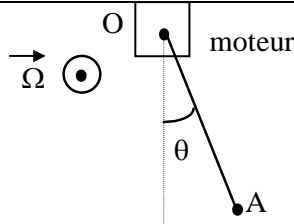
Sujet : Mouvement d'un point entraîné par une tige

Outils : Energie, puissance et relations entre ces grandeurs

Difficulté : *

n° 4.

Un point A de masse m est entraîné par une tige rigide de longueur $OA = \ell$, de masse négligeable, en rotation dans un plan vertical autour d'un point O (représentant l'axe d'un moteur, la tige est fixée rigidement sur l'axe). Le moteur tourne à vitesse angulaire constante Ω .



A la date $t = 0$, $\theta = 0$. On néglige tous les frottements.

(Question 1 déjà traitée : chapitre précédent).

1. Exprimer l'action de la tige en fonction du temps, en utilisant la 2^{ème} loi de Newton.
2. Exprimer l'énergie mécanique E_m du point matériel A dans le référentiel lié au moteur, supposé galiléen en fonction de θ et de $\dot{\theta}$.
3. Exprimer la puissance \mathcal{P}_m du moteur de 2 façons différentes, à partir de sa définition (on admet que la puissance du moteur est égale à la puissance de la force exercée par la tige sur A) puis en utilisant l'énergie mécanique.

Sujet : Energie potentielle, stabilité des équilibres

Outils : voir titre...

Difficulté : *

n° 5.

Soit l'énergie potentielle E_p , dépendant de la variable r , d'expression : $E_p = -\frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{r^2}$

Déterminer l'expression r_e de r à l'équilibre, préciser la nature de l'équilibre (k_1 et $k_2 > 0$).

Sujet : Particule dans un puits de potentielOutils : Relation force / E_p

Difficulté : *

n° 6.

Une particule de masse m se déplace sans frottements sur un axe (Ox) dans un référentiel galiléen dans le champ de force $F(x)$ dérivant de l'énergie potentielle :

$$E_p(x) = m \frac{\omega^2 \left(x^2 + \frac{a^4}{x^2} \right)}{2} \quad \omega \text{ et } a \text{ étant des constantes positives.}$$

On admettra qu'une telle énergie potentielle peut décrire, de manière approchée, le mouvement d'une particule dans certains édifices atomiques. On négligera l'existence de toute autre force. La variable x est positive : $x > 0$.

Montrer qu'il existe une position d'équilibre stable.

Sujet : Mouvement sur une hélice

Outils : Théorème de l'énergie cinétique, intégration par séparation des variables

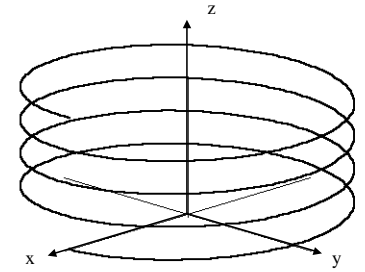
Difficulté : **

n° 7.

On enfle une perle sur un fil métallique matérialisant une hélice circulaire d'axe (Oz) vertical ascendant et d'équations paramétriques :

$x = R \cdot \cos \theta$, $y = R \cdot \sin \theta$, $z = p \cdot \theta$, $p > 0$ étant le pas de l'hélice.

La perle étant abandonnée sans vitesse initiale en un point de cote $z = h = p \cdot \theta_0$, étudier son mouvement ultérieur en l'absence de frottements, en déduire les composantes de l'action de l'hélice sur la perle.



- ✎ Ecrire le théorème de l'énergie cinétique. Ne pas faire d'hypothèse a priori sur les composantes de la réaction : les calculer.

